波動方程式の混合問題に対する重み付きエネルギー評価について

東北大学情報科学研究科博士前期課程

システム情報数理学Ⅲ 修士論文

波動方程式の混合問題に対する重み付きエネルギー評価について

馬兆偉
(数学専攻)
指導教員 坂口茂

2013年8月

概要

参考文献 [4] では時空間 L^2 評価を得るために, 参考文献 [6] で用いられた方法を適用することにより非線形 Klein-Gordon 方程式系の混合問題

$$
\begin{cases} (\Box + m_1^2)u + auv^2 = 0, & x \in \Omega, \\ (\Box + m_2^2)v + avu^2 = 0, & x \in \Omega, \end{cases}
$$
$$
u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0,
$$
$$
\begin{cases} u_0(x) = u(0,x), & u_1(x) = u_t(0,x), \\ v_0(x) = v(0,x), & v_1(x) = v_t(0,x). \end{cases}
$$

の解の局所エネルギーが時間とともに減衰することが証明された. ここに, $\Box = \partial_t^2 - \Delta,\ \Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ である.

本論文ではその方法をヘルムホルツ方程式

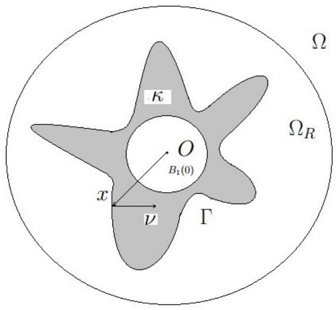
$$
\begin{cases} \Delta v + k^2 v = h(x), & x \in \Omega \\ v\mid_\Gamma = 0 \end{cases}
$$

に適用して, いくつかの評価を得ることにより, 波動方程式の混合問題の解の重み付きエネルギーを評価した.

本論文の構成は以下の通りである. 先ず第 1 章で本論文の主定理を挙げる. 第 2 章で定理を証明するために使われている記号の説明や必要な定義と補題および命題を紹介する. 第 3 章で前節で紹介された補題と命題の証明を踏まえて, 主定理を証明する. 第 4 章で補足として参考文献 [2] で導かれていた補題 1 を証明する.

目 次

第1章　序文



$n \geq 3$ とする．R^n の領域 κ を空集合ではないとし，κ の境界 $\Gamma = \partial\kappa$ は滑らかであるとする．また，$\Omega = R^n \setminus \overline{\kappa}$ とおく．

次の波動方程式の混合問題を考える:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x) \\ u\,|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{1-0-1}$$

平行移動とスケール変換によって，一般性を失うことなく

$$B_1(0) := \{x \in R^n \big| \ |x| \leq 1\} \subset \kappa$$

であると仮定してよい．更に，κ は原点 O に関して星形であるとする．即ち，ν を Ω の外向きの単位法線ベクトルとするとき，

$$\nu \cdot x \leq 0 \quad (\forall x \in \Gamma) \tag{1-0-2}$$

が成り立つとする．

この問題の解の局所エネルギー

$$E_R(t) := \int_{\Omega \cap \{|x| \leq R\}} (u_t^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2)dx,\ R > 1$$

は初期値 f, g の台がコンパクトならば，

$$\lim_{t\to\infty} E_R(t) = 0$$

を満たすことが知られている (例えば参考文献 [5] を参照).

参考文献 [1] では初期値の台が必ずしもコンパクトではない場合に次のような重み付きエネルギー

$$E_\Omega(t) = \int_\Omega (u_t^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2)\frac{1}{|x|^4}dx$$

の時間変数に関する可積分性が考察されているが, 空間次元 n について, $n \geq 6$ という制限がついている.

本修士論文では一般の $n \geq 3$ のときに, 上の重み付きエネルギーの可積分性について研究した.

まず, 主定理を述べる:

定理 1. $n \geq 3$ かつ境界 Γ は 条件 (1-0-2) を満たすとする. 初期値 f と g は実数値関数で, $f, g \in C^5(\Omega \cup \Gamma)$ と $\Delta^i f|_\Gamma = \Delta^i g|_\Gamma = 0$ $(i = 0, 1, 2)$ を満たし,

$$C_{f,g} := \sum_{i=0}^{2}\Big(\|\nabla\Delta^i f\|_{L_4^2}^2 + \|\nabla\Delta^i g\|_{L_4^2}^2 + \|\Delta^i f\|_{L_4^2}^2 + \|\Delta^i g\|_{L_4^2}^2\Big) < \infty$$

と仮定する. ここで, $\|f\|_{L_4^2}^2 = \int_\Omega |f(x)|^2|x|^4 dx$ である. この時, 波動方程式 (1-0-1) の解は次の不等式を満たす:

$$\int_0^\infty t^2 dt \int_\Omega \big(u_t^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2\big)\frac{1}{|x|^4}dx \leq CC_{f,g} \tag{1-0-3}$$

証明の方針は次の通りである:

1. 波動方程式の解を時間変数についてラプラス変換したものを評価する. その評価と Plancherel の定理を組み合わせると, 示すべき評価式が得られる.

2. ラプラス変換したものを評価する際には, そのスペクトルパラメーター k について, $|k| \leq 1$ の場合と $|k| > 1$ の場合に分けて行う.

3. 今回工夫したのは特に $|k| \leq 1$ の場合の評価であり, その際, 参考文献 [4](あるいは参考文献 [6]) で用いられた方法を応用した. それにより, 先行研究で仮定されていた $n \geq 6$ という条件を外すことができた.

第2章　準備

2.1　記号

- 任意の $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$ に対して, $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ を x と y の内積とする.
- $C^+ := \{k = \omega + i\mu \big| \ \omega \in R,\ \mu > 0\}$
- $K := \{k \in C^+ \big| \ |k| \leq 1\}$
- 重み付きノルム: $s \in R,\ 1 \leq p < \infty$ に対して, $\|f\|_{L^p_s} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p |x|^s dx\right)^{\frac{1}{p}}$ と定める.

2.2　準備

定義 (フーリエ変換)**.** 可積分関数 $f : R \to C$ のフーリエ変換を次のように定義する:

$$F[f](\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt, \quad \omega \in R$$

Planchrel の定理 . $f \in L^2$ ならば, $\|f\|_{L^2} = \|F[f]\|_{L^2}$ が成り立つ.

Beppo Levi の単調収束定理 . $\Omega \subset R^n$ とする. f_n が $L^1(\Omega)$ の非負単調増加関数列で,

$$\sup_{n \in N} \int_\Omega f_n(x) dx < \infty$$

を満たすならば, ほとんどすべての x で, $f_n(x)$ は有限な極限関数 $f(x)$ に収束し, $f \in L^1(\Omega)$, そして,

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

2.3　命題

混合問題 (1-0-1) の解 $u(t,x)$ のラプラス変換を $v(x,k)$ とする．すなわち, 任意の $k \in C^+$ に対して,

$$v(x,k) = \int_0^\infty e^{ikt} u(t,x) dt, \quad t > 0$$

である．すると, 波動方程式 (1-0-1) から次のヘルムホルツ方程式を得る．

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = -g(x) + ikf(x), & x \in \Omega \\ v \mid_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{2-3-1}$$

(2-3-1) の解 $v(x,k)$ は次の命題 1 を満たす:

命題 1. $n \geq 3$ かつ境界 Γ は 条件 (1-0-2) を満たすとする．初期データ f と g は実数値関数で, $f, g \in C^5(\Omega \cap \Gamma)$ と $\Delta^i f|_\Gamma = \Delta^i g|_\Gamma = 0$ $(i = 0, 1, 2)$ を満たし,

$$C_{f,g} := \sum_{i=0}^{2} \Big(\|\nabla \Delta^i f\|^2_{L^2_4} + \|\nabla \Delta^i g\|^2_{L^2_4} + \|\Delta^i f\|^2_{L^2_4} + \|\Delta^i g\|^2_{L^2_4} \Big) < \infty$$

と仮定する．この時, ヘルムホルツ方程式 (2-3-1) の解 $v(x,k)$ は次の評価を満たす:

$$\int_\Omega \Big(|v|^2 + \Big|\nabla \frac{dv}{dk}\Big|^2 + |k|^2 \Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2 \Big) \frac{1}{|x|^4} dx \leq \frac{CC_{f,g}}{|k|^2 + 1}, \quad k \in C^+. \tag{2-3-2}$$

命題 1 に基づいて, 定理 1 を証明することができる．また, 命題 1 は $n \geq 6$ のとき参考文献 [1] で証明されたが, 本論文では $n \geq 3$ のときも成り立つことを証明する．

命題 1 で与えられた評価は, 非斉次項を $h(x)$ に一般化して, 条件 (1-0-2) のもと, ヘルムホルツ方程式

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = h(x), & x \in \Omega \\ v|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{2-3-3}$$

の唯一な解 $v(x,k)$ に対して, 次の補題や命題を示すことによって導くことができる．

補題 1. Γ は条件 (1-0-2) を満たし, 任意の $p = 0, 1, 2, \ldots$ かつ $k \in C^+$ に対して, (2-3-3) の解 $v(x,k)$ は次の評価を満たす:

$$\int_\Omega \Big(|v(x,k)|^2 + |\nabla v(x,k)|^2 \Big) r^p dx \leq C(\mu) \int_\Omega |h(x)|^2 r^p dx$$

ここに, $C(\mu)$ は μ に依存する定数であり, $r = |x|$ である．

補題 1 は参考文献 [2] で証明されている．補題 1 に基づいて, 次の命題 2 と命題 3 が成り立つ．

命題 2. Γ は条件 (1-0-2) を満たし，$h(x), \nabla h(x) \in L_4^2(\Omega)$ と仮定する．任意の $k \in C^+$ に対して，(2-3-3) の解 $v(x,k)$ は次の評価を満たす:

$$\int_\Omega (|\nabla v|^2 + |v|^2)\frac{1}{r^4}dx \le C \int_\Omega (|h|^2 + |\nabla h|^2) r^4 dx$$

命題 3. Γ は条件 (1-0-2) を満たし，$h \in C^3(\Omega \cup \Gamma)$, $\nabla^i \Delta^j h(x) \in L_4^2(\Omega)$ $\ (i, j = 0, 1)$ と $\Delta^i h|_\Gamma = 0$ $\ (i = 0, 1, 2)$ を仮定する．任意の $k \in C^+$ に対して，(2-3-3) の解 $v(x,k)$ は次の評価を満たす:

$$\int_\Omega |v|^2 \frac{1}{r^2} dx \le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega (|h|^2 + |\Delta h|^2) r^2 dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \frac{1}{r^4} dx \le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|\nabla h|^2 + |\Delta h|^2 + |\nabla \Delta h|^2\Big) r^4 dx$$

第3章　証明

3.1　定理1の証明

命題1が成り立つことに基づいて, 定理1を証明する.

証明. 任意の $k \in C^+$ に対して,

$$v(x,k) = \int_0^\infty e^{ikt} u(t,x) dt = \int_0^\infty e^{iwt} e^{-\mu t} u(t,x) dt$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{ikt} u_t(t,x) dt &= \Big[e^{ikt} u(t,x) \Big]_0^\infty - ik \int_0^\infty e^{ikt} u(t,x) dt \\ &= -\Big(u(0,x) + ikv(x,k) \Big)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{ikt} t u_t(t,x) dt &= -i \int_0^\infty \frac{d}{dk} e^{ikt} u_t(t,x) dt \\ &= -i \frac{d}{dk} \int_0^\infty e^{ikt} u_t(t,x) dt \\ &= i \frac{d}{dk} \Big(u(0,x) + ikv(x,k) \Big) \\ &= -\Big(v(x,k) + k \frac{d}{dk} v(x,k) \Big) \qquad \text{(3-1-1)}\end{aligned}$$

が得られる. また,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{ikt} t \nabla u(t,x) dt &= -i \int_0^\infty \frac{d}{dk} e^{ikt} \nabla u(t,x) dt \\ &= -i \nabla \frac{d}{dk} \int_0^\infty e^{ikt} u(t,x) dt \\ &= -i \nabla \frac{d}{dk} v(x,k) \qquad \text{(3-1-2)}\end{aligned}$$

も得られる. (3-1-1) と (3-1-2) を ω に関してのフーリエ変換と見なして, 逆変換すると,

$$e^{-\mu t} t u_t(t,x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} \Big(v(x,k) + k \frac{d}{dk} v(v,k) \Big) d\omega,$$

$$e^{-\mu t}t\nabla u(t,x) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\nabla\frac{d}{dk}v(x,k)d\omega$$

Plancherel の定理により,

$$\int_0^{\infty} e^{-2\mu t}t^2 u_t^2(t,x)dt = C\int_{-\infty}^{\infty}\left|v(x,k)+k\frac{d}{dk}v(x,k)\right|^2 d\omega, \tag{3-1-3}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\mu t}t^2|\nabla u(t,x)|^2 dt = C\int_{-\infty}^{\infty}\left|\nabla\frac{d}{dk}v(x,k)\right|^2 d\omega. \tag{3-1-4}$$

を得る. (3-1-3) と (3-1-4) により,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} e^{-2\mu t}t^2(u_t^2(t,x)+|\nabla u(t,x)|^2)dt \\
\leq\ & C\int_{-\infty}^{\infty}\Big(|v(x,k)|^2+|k|^2\left|\frac{d}{dk}v(x,k)\right|^2+\left|\nabla\frac{d}{dk}v(x,k)\right|^2\Big)d\omega. \qquad (3\text{-}1\text{-}5)
\end{aligned}$$

(3-1-5) の両辺を Ω において積分して, 命題 3 を使うと,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\int_{\Omega} e^{-2\mu t}t^2\Big(u_t^2(t,x)+|\nabla u(t,x)|^2\Big)\frac{1}{r^4}dxdt \\
\leq\ & C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\Big(|v(x,k)|^2+|k|^2\left|\frac{d}{dk}v(x,k)\right|^2+\left|\nabla\frac{d}{dk}v(x,k)\right|^2\Big)\frac{1}{r^4}dxd\omega \\
\leq\ & CC_{f,g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|k|^2+1}d\omega \\
\leq\ & CC_{f,g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2+1}d\omega \\
\leq\ & CC_{f,g}
\end{aligned}$$

更に, 左辺は Beppo Levi の単調収束定理により, $\mu\to 0$ とすると,

$$\int_0^{\infty} t^2 dt\int_{\Omega}\Big(u_t^2(t,x)+|\nabla u(t,x)|^2\Big)\frac{1}{r^4}dx$$

に収束する. よって, (1-0-3) を得て, 定理 1 が証明される. □

3.2　命題 2 の証明

証明. 先ず, 非斉次項を $h(x) \in L^2(\Omega)$ に一般化して得たヘルムホルツ方程式

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = h(x), & x \in \Omega, \\ v|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3-2-1}$$

を考える. この問題の唯一な解 $v(x,k) \in W_2^1(\Omega)$ が存在して, 解の実部と虚部を分けて考える. v_1, v_2, $h_1(x)$, $h_2(x)$ をそれぞれ $v(x,k)$, $h(x)$ の実部と虚部とすると, 実部方程式:

$$\begin{cases} \Delta v_1 + \mathrm{Re}k^2 v_1 = h_1(x), & x \in \Omega \\ v_1|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3-2-2}$$

虚部方程式:

$$\begin{cases} \Delta v_2 + \mathrm{Im}k^2 v_2 = h_2(x), & x \in \Omega \\ v_2|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3-2-3}$$

を得る. そこで, 実部方程式 (3-2-2) に対して,

$$\begin{aligned} A(v_1,k) &= |\nabla v_1|^2 - \mathrm{Re}k^2 |v_1|^2 \\ Q_{\alpha\beta}(v_1,k) &= (\partial_\alpha v_1)(\partial_\beta v_1) - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} A(v_1,k) \\ \delta_{\alpha\beta} &= \begin{cases} 1 & 1 \le \alpha = \beta \le n \\ 0 & otherwise \end{cases} \\ D^\alpha &= \partial_\alpha \\ X^\alpha &= \frac{J(r)}{r} x_\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, n \\ J(r) &= \frac{r}{r+1}, \quad r > 1 \\ T(J) &= J'(r) + (n-1)\frac{J(r)}{r} \end{aligned}$$

とおく. 以下では上下の添字が一致しているときは常に和をとるものとする.

補題 2. v_1 をヘルムホルツ方程式 (3-2-2) の解とし, 任意の $k \in C^+$ に対して,

$$P_\alpha(v_1,k,J) = Q_{\alpha\beta}(v_1,k) X^\beta$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & D^\alpha P_\alpha(v_1,k,J) \\ = \;& h_1(x)\ (\partial_r v_1) J(r) + |\partial_r v_1|^2 J'(r) + (|\nabla v_1|^2 - |v_1|^2)\frac{J(r)}{r} - \frac{1}{2} A(v_1,k) T(J) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\partial_r v = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla v$ である.

証明. 先ず,

$$D^\alpha P_\alpha(v_1,k,J) = (D^\alpha Q_{\alpha\beta})X^\beta + Q_{\alpha\beta}(D^\alpha X^\beta) \tag{3-2-4}$$

である. 第一項について,

$$\begin{aligned} D^\alpha Q_{\alpha\beta}(v_1,k) &= (\sum_{\alpha=1}^n \partial_\alpha^2 v_1)(\partial_\beta v_1) + \sum_{\alpha=1}^n (\partial_\alpha v_1)(\partial_\alpha\partial_\beta v_1) \\ &\quad - \sum_{\beta=1}^n (\partial_\alpha\partial_\beta v_1)(\partial_\beta v_1) + \mathrm{Re}k^2 v_1(\partial_\beta v_1) \\ &= (\Delta v_1 + \mathrm{Re}k^2 v_1)(\partial_\beta v_1) \\ &= h_1(x)\partial_\beta v_1 \end{aligned}$$

なので,

$$(D^\alpha Q_{\alpha\beta})X^\beta = h_1(x)(\partial_\beta v_1)X^\beta = h_1(x)(\partial_r v_1)J(r) \tag{3-2-5}$$

を得る. 一方, 第二項について,

$$D^\alpha X^\beta = \frac{x_\alpha x_\beta}{r^2}\Big(J'(r) - \frac{J(r)}{r}\Big) + J(r)\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r}$$

なので,

$$Q_{\alpha\beta}(D^\alpha X^\beta) = J'(r)|\partial_r v_1|^2 + \Big(|\nabla v_1|^2 - |\partial_r v_1|^2\Big)\frac{J(r)}{r} - \frac{1}{2}A(v_1,k)T(J) \tag{3-2-6}$$

を得る. (3-2-4), (3-2-5) と (3-2-6) を用いて補題 3 が成り立つ. □

補題 3. v_1 をヘルムホルツ方程式 (3-2-2) の解とし, 任意の $k \in C^+$ に対して,

$$\widetilde{P}_\alpha(v_1,k,J) = P_\alpha(v_1,k,J) + \frac{1}{2}v_1(\partial_\alpha v_1)T(J) - \frac{1}{4}|v_1|^2(\partial_\alpha T(J))$$

とおくと, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} & D^\alpha \widetilde{P}_\alpha(v_1,k,J) - \nabla\cdot\Big(\frac{x}{r}J(r)h_1(x)v_1\Big) \\ = \ & |\partial_r v_1|^2 J'(r) + (|\nabla v_1|^2 - |\partial_r v_1|^2)\frac{J(r)}{r} - \frac{1}{2}h_1(x)v_1 T(J) - \frac{1}{4}|v_1|^2\Delta T(J) \\ & -\Big(\partial_r h_1(x)\Big)v_1 J(r) \end{aligned} \tag{3-2-7}$$

証明. 先ず,

$$
\begin{aligned}
& D^{\alpha}\Big(\frac{1}{2}v_1(\partial_\alpha v_1)T(J)-\frac{1}{4}|v_1|^2\partial_\alpha T(J)\Big)\\
= & \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}|\partial_\alpha v_1|^2T(J)+\frac{1}{2}v_1\sum_{\alpha=1}^{n}\partial_\alpha^2 v_1T(J)+\frac{1}{2}v_1\sum_{\alpha=1}^{n}(\partial_\alpha v_1)\partial_\alpha T(J)\\
& -\frac{1}{2}v_1\sum_{\alpha=1}^{n}(\partial_\alpha v_1)\partial_\alpha T(J)-\frac{1}{4}|v_1|^2\sum_{\alpha=1}^{n}\partial_\alpha^2 T(J)\\
= & \frac{1}{2}|\nabla v_1|^2T(J)+\frac{1}{2}v_1\Delta v_1T(J)-\frac{1}{4}|v_1|^2\Delta T(J)\pm\frac{1}{2}\mathrm{Re}k^2|v_1|^2T(J)\\
= & \frac{1}{2}A(v_1,k)T(J)+\frac{1}{2}v_1h_1(x)T(J)-\frac{1}{4}|v_1|^2\Delta T(J)
\end{aligned}
$$

であるから, (3-2-4) を用いて,

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}\widetilde{P}_\alpha(v_1,k,J) = & h_1(x)(\partial_r v_1)J(r)+|\partial_r v_1|^2J'(r)+\Big(|\nabla v_1|^2-|\partial_r v_1|^2\Big)\frac{J(r)}{r}\\
& +\frac{1}{2}v_1h_1(x)T(J)-\frac{1}{4}|v_1|^2\Delta T(J)
\end{aligned}
\tag{3-2-8}
$$

を得る. また,

$$
\nabla\cdot\Big(\frac{x}{r}J(r)h_1(x)v_1\Big)=h_1(x)v_1T(J)+h_1(x)(\partial_r v_1)J(r)+\partial_r h_1(x)v_1J(r) \tag{3-2-9}
$$

であるので, (3-2-8) と (3-2-9) により, (3-2-7) が得られる. □

補題 4. Γ が条件 (1-0-2) を満たし, v_1 をヘルムホルツ方程式 (3-2-2) の解とし, 任意の $k\in C^+$ に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$
\int_\Omega\Big(|\nabla v_1|^2\frac{1}{r^2}+|v_1|^2\frac{1}{r^4}\Big)dx\le C\int_\Omega(|h_1|^2+|\nabla h_1|^2)r^4dx \tag{3-2-10}
$$

証明. (3-2-7) の両辺を Ω において積分する. (3-2-7) の左辺について発散定理と境界条件を用いれば,

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega\Big(D^{\alpha}\widetilde{P}_\alpha(v_1,k,J)-\nabla\cdot\Big(\frac{x}{r}J(r)\big(h_1(x)\big)v_1\Big)\Big)dx\\
= & \int_\Gamma\Big(\sum_{i=1}^{n}P_i(v_1,k,J)\nu_i\Big)ds\\
= & \int_\Gamma\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\big((\partial_i v_1)(\partial_j v_1)-\frac{1}{2}\delta_{ij}|\nabla v_1|^2\big)\frac{J(r)}{r}x_i\Big)\nu_i\Big)ds\\
= & \int_\Gamma\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big((\partial_i v_1)(\partial_r v_1)J(r)-\frac{1}{2}|\nabla v_1|^2\frac{J(r)}{r}x_i\Big)\nu_i\Big)ds\\
= & \int_\Gamma\partial_\nu v_1\partial_r v_1J(r)-\frac{1}{2}|\nabla v_1|^2\frac{J(r)}{r}(x\cdot\nu)ds
\end{aligned}
$$

となる．ただし, $\partial_\nu v_1 = \nu\cdot\nabla v_1$ である．最後の式の被積分関数が0以下であることを言いたい．そこで,

$$\partial_i v_1 = (\partial_\nu v_1)\nu_i \quad (x \in \Gamma) \tag{3-2-11}$$

を示す．任意に $x_0 \in \Gamma$ をとり固定する．x_0 における Ω に関する外向き単位法線ベクトルを $\nu(x_0)$ とし, x_0 における Γ の接ベクトル $\tau_i(x_0)$, $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ を大きさ1で直交するようにとると,

$$\nabla v_1(x_0) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x_0)\tau_i(x_0) + a_n(x_0)\nu(x_0), \quad (a_i(x_0) \in R,\ i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

とかける．両辺, $\tau_i(x_0), \nu(x_0)$ との内積をとると, それぞれ

$$\begin{aligned} \tau_i(x_0)\cdot\nabla v_1(x_0) &= a_i(x_0) \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \nu(x_0)\cdot\nabla v_1(x_0) &= a_n(x_0) \end{aligned}$$

となる．境界条件より, $a_i(x_0) = 0\ \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ であるので (3-2-11) が示される．

(3-2-11) より, $\partial_r v_1 = (\partial_\nu v_1)\frac{x\cdot\nu}{r},\ |\nabla v_1|^2 = |\partial_\nu v_1|^2$ がわかる．したがって,

$$\partial_\nu v_1 \partial_r v_1 J(r) - \frac{1}{2}|\nabla v_1|^2 \frac{J(r)}{r}(x\cdot\nu) = \frac{1}{2}J(r)|\nabla v_1|^2 \frac{x\cdot\nu}{r}$$

となる．条件 (1-0-2) より,

$$\int_\Gamma \partial_\nu v_1 \partial_r v_1 J(r) - \frac{1}{2}|\nabla v_1|^2 \frac{J(r)}{r}(x\cdot\nu)ds \leq 0$$

を得る．よって, (3-2-7) の右辺の積分したものを整理すると,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\partial_r v_1|^2 J'(r) + (|\nabla v_1|^2 - |\partial_r v_1|^2)\frac{J(r)}{r} - \frac{1}{4}|v_1|^2 \Delta T(J) \right) dx \\ \leq\ &\int_\Omega \left(\frac{1}{2}v_1 h_1(x) T(J) + \partial_r h_1(x) v_1 J(r) \right) dx \end{aligned}$$

が得られる．そこで,

$$J(r) = \frac{r}{r+1}, \qquad \frac{J(r)}{r} = \frac{1}{r+1} \geq \frac{1}{(r+1)^2}, \qquad J'(r) = \frac{1}{(r+1)^2},$$

$$T(J) = J'(r) + (n-1)\frac{J(r)}{r} = \frac{1}{(r+1)^2} + (n-1)\frac{1}{r+1} \leq \frac{n}{(r+1)},$$

$$
\begin{aligned}
-\Delta T(J) &= \frac{(n-1)(n-3)r^2+2(n^2-2n-2)r+(n+1)(n-1)}{r(r+1)^4} \\
&\geq \frac{2r}{r(r+1)^4} = \frac{2}{(r+1)^4} \quad (n \geq 3)
\end{aligned}
$$

に注意すれば,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \big(|\nabla v_1|^2 \frac{1}{(r+1)^2} + |v_1|^2 \frac{1}{2(r+1)^4}\big) dx \\
\leq\ & \int_\Omega \bigg(\frac{1}{2} v_1 h_1(x) T(J) + \Big(\partial_r h_1(x)\Big) v_1 J(r)\bigg) dx \\
\leq\ & \Big| \int_\Omega \bigg(\frac{1}{2} v_1 h_1(x) T(J) + \partial_r h_1(x) v_1 J(r)\bigg) dx \Big| \\
\leq\ & C \int_\Omega \Big(|v_1||h_1(x)| \frac{r}{r+1} + |\nabla \big(h_1(x)\big)||v_1| \frac{r}{r+1}\Big) dx \\
\leq\ & C \bigg(\int_\Omega |v_1|^2 \frac{1}{(r+1)^4}\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \Big(\big(\int_\Omega |h_1|^2 (r+1)^4 dx\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\int_\Omega |\nabla h_1|^2 (r+1)^4 dx\big)^{\frac{1}{2}}\Big) \qquad \text{(3-2-12)}
\end{aligned}
$$

を得る. $r > 1$ の仮定より, $r+1 < 2r$ なので,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \big(|\nabla v_1|^2 \frac{1}{r^2} + |v_1|^2 \frac{1}{r^4}\big) dx \\
\leq\ & C \bigg(\int_\Omega |v_1|^2 \frac{1}{r^4}\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\big(\int_\Omega |h_1|^2 r^4 dx\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\int_\Omega |\nabla h_1|^2 r^4 dx\big)^{\frac{1}{2}}\bigg)
\end{aligned}
$$

を得る. よって,

$$
\int_\Omega |v_1|^2 \frac{1}{r^4} dx \leq C \int_\Omega (|h_1|^2 + |\nabla h_1|^2) r^4 dx \qquad \text{(3-2-13)}
$$

を得る. したがって,

$$
\int_\Omega |\nabla v_1|^2 \frac{1}{r^2} dx \leq C \Big(\big(\int_\Omega |h_1|^2 r^4 dx\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\int_\Omega |\nabla h_1|^2 r^4 dx\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2
$$

でもあるから,

$$
\int_\Omega |\nabla v_1| \frac{1}{r^2} dx \leq C \int_\Omega (|h_1|^2 + |\nabla h_1|^2) r^4 dx \qquad \text{(3-2-14)}
$$

が得られる. (3-2-13), (3-2-14) により, 補題 4 が成り立つ. □

また, 虚部 v_2 は

$$
\begin{cases}
\Delta v_2 + \ \mathrm{Im} k^2 v_2 = h_2(x), \quad x \in \Omega, \\
v_2|_\Gamma = 0
\end{cases}
$$

を満たすので, (3-2-10) と同様に, 次の評価が成り立つことがわかる:

$$\int_{\Omega}(|\nabla v_2|^2+|v_2|^2)\frac{1}{r^4}dx \leq C\int_{\Omega}(|h_2|^2+|\nabla h_2|^2)r^4dx \tag{3-2-15}$$

(3-2-10) と (3-2-15) により, 命題 2 が証明される. □

3.3　命題 3 の証明

証明.　1. ヘルムホルツ方程式 (2-3-3) の解 v は仮定より,

$$\begin{cases} \Delta(\Delta v) + k^2 \Delta v = \Delta h(x), & x \in \Omega \\ \Delta v|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3-3-1}$$

を満たす. 混合問題 (3-3-1) に補題 1 を適用して,

$$\int_\Omega (|\Delta v|^2 + |\nabla \Delta v|^2) \frac{1}{r^2} dx \le C(\mu) \int_\Omega |\Delta h|^2 r^2 dx \tag{3-3-2}$$

が得られる. また, (2-3-3) から,

$$v = \frac{1}{k^2}(h - \Delta v)$$

なので,

$$|v|^2 \le \frac{C}{|k|^4}(|h|^2 + |\Delta v|^2), \tag{3-3-3}$$

$$|\nabla v|^2 \le \frac{C}{|k|^4}(|\nabla h|^2 + |\nabla \Delta v|^2) \tag{3-3-4}$$

を得る. (3-3-3) と (3-3-2) を用いて,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v|^2 \frac{1}{r^2} dx &\le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|h|^2 + |\Delta v|^2\Big) \frac{1}{r^2} dx \\ &\le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|h|^2 + |\Delta h|^2\Big) r^2 dx \end{aligned} \tag{3-3-5}$$

を得る.

2. 方程式 (3-3-1) に命題 2 を適用して,

$$\int_\Omega |\nabla \Delta v|^2 \frac{1}{r^4} dx \le C \int_\Omega \Big(|\Delta h|^2 + |\nabla \Delta h|^2\Big) r^4 dx \tag{3-3-6}$$

を得て, (3-3-4) と (3-3-6) を用いて,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2 \frac{1}{r^4} dx &\le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|\nabla h|^2 + |\nabla \Delta v|^2\Big) \frac{1}{r^4} dx \\ &\le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|\nabla h|^2 + |\Delta h|^2 + |\nabla \Delta h|^2\Big) r^4 dx \end{aligned}$$

を得る.

以上より, 命題 3 が証明される.

□

3.4　命題 1 の証明

証明. 各部分を分けて評価する. 以下では, 常に $h(x) = g(x) - ikf(x)$ とする.

- $\int_\Omega |v|^2 \frac{1}{r^4} dx \le \frac{C_{f,g}}{|k|^2+1}$

  1. $k \in K = \{k \in C^+ \big| \ |k| \le 1\}$ のとき, 命題 2 より,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v|^2 \frac{1}{r^4} dx &\le C \int_\Omega \Big(|\nabla h|^2 + |h|^2\Big) r^4 dx \\ &\le C \int_\Omega (g^2 + |\nabla g|^2 + |k|^2 f^2 + |k|^2 |\nabla f|^2) r^4 dx \\ &\le CC_{f,g}(|k|^2+1) \\ &\le CC_{f,g} \frac{(|k|^2+1)^2}{|k|^2+1} \\ &\le \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)\end{aligned}$$

  である.

  2. $k \in C^+ \backslash K$ のとき, 命題 3 を使えば,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v|^2 \frac{1}{r^2} dx &\le \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|h|^2 + |\Delta h|^2\Big) r^2 dx \\ &\le CC_{f,g} \frac{(|k|^2+1)}{|k|^4} \\ &\le CC_{f,g} \frac{(|k|^2+1)^2}{|k|^4} \frac{1}{|k|^2+1} \\ &\le \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1} \qquad (3\text{-}4\text{-}2)\end{aligned}$$

  (3-4-1) と (3-4-2) を用いて,

$$\forall k \in C^+, \quad \int_\Omega |v|^2 \frac{1}{r^4} dx \le \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1} \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

  が得られる.

他の部分を証明する前に, 先ず, 命題 2 に対する次の系 1 を示す.

系 1. 任意の $k \in C^+$ に対して, ヘルムホルツ方程式 (2-3-3) の解は次の評価を満たす:

$$\int_\Omega \Big(\Big|\nabla \frac{dv}{dk}\Big|^2 + \Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2\Big) \frac{1}{r^4} dx \le CC(\mu)(|k|^2+1) \int_\Omega \Big(|h|^2 + \Big|\frac{dh}{dk}\Big|^2 + \Big|\nabla \frac{dh}{dk}\Big|^2\Big) r^4 dx \qquad (3\text{-}4\text{-}4)$$

証明. $v(x,k)$ を k について微分した $\dfrac{dv}{dk}$ は次の問題の解となる.

$$\begin{cases} \Delta\dfrac{dv}{dk} + k^2\dfrac{dv}{dk} = -2kv + \dfrac{dh}{dk}, \quad x \in \Omega \\ \dfrac{dv}{dk}\Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3-4-5}$$

混合問題 (3-4-5) に対して, 命題 2 で h を $-2kv + \dfrac{dh}{dk}$ としたものを適用すれば,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big(\Big|\nabla\frac{dv}{dk}\Big|^2 + \Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2\Big)\frac{1}{r^4}dx \\ \le\ & C\int_\Omega \Big(|2kv|^2 + \Big|\frac{dh}{dk}\Big|^2 + |2k\nabla v|^2 + \Big|\nabla\frac{dh}{dk}\Big|^2\Big) r^4 dx \\ \le\ & C(|k|^2+1)\int_\Omega \Big(|v|^2 + |\nabla v|^2 + \Big|\frac{dh}{dk}\Big|^2 + \Big|\nabla\frac{dh}{dk}\Big|^2\Big) r^4 dx \end{aligned} \tag{3-4-6}$$

が得られる. (3-4-6) と補題 1 により, (3-4-4) が得られる. □

- $|k|^2 \int_\Omega |\frac{dv}{dk}|^2 \frac{1}{r^4} dx \le \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1}$

  1. $k \in K$ のとき, 系 1 を用いれば,

  $$\int_\Omega \Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2 \frac{1}{r^4} dx \le CC_{f,g}(|k|^2+1)^2 \le \frac{CC_{f,g}}{(|k|^2+1)^2} \tag{3-4-7}$$

  を得る.

  2. $k \in C^+ \backslash K$ のとき, 次のように評価する:
  (3-4-5) により,

  $$\frac{dv}{dk} = \frac{1}{k^2}\Big(\frac{dh}{dk} - 2kv - \Delta\frac{dv}{dk}\Big)$$

  なので,

  $$\Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2 \le \frac{C}{|k|^4}\Big(\Big|\frac{dh}{dk}\Big|^2 + |k|^2|v|^2 + \Big|\Delta\frac{dv}{dk}\Big|^2\Big) \tag{3-4-8}$$

  を得る. また, (3-4-5) と $\Delta f|_\Gamma = \Delta g|_\Gamma = 0$ との仮定により,

  $$\begin{cases} \Delta(\Delta\dfrac{dv}{dk}) + k^2(\Delta\dfrac{dv}{dk}) = -2k\Delta v + \Delta\dfrac{dh}{dk}, \quad x \in \Omega \\ \Delta\dfrac{dv}{dk}\Big|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3-4-9}$$

を得る．(3-4-9) に命題 3 を適用して，

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Big|\Delta\frac{dv}{dk}\Big|^2\frac{1}{r^2}dx\\ \leq\ &\frac{C}{|k|^4}\int_\Omega\Big(|2k\Delta v|^2+|2k\Delta^2 v|^2+\Big|\Delta\frac{dh}{dk}\Big|^2+\Big|\Delta^2\frac{dh}{dk}\Big|^2\Big)r^4dx\\ \leq\ &\frac{C}{|k|^4}\int_\Omega\Big(|k|^2|\Delta v|^2+|k|^2|\Delta^2 v|^2+\Big|\Delta\frac{dh}{dk}\Big|^2+\Big|\Delta^2\frac{dh}{dk}\Big|^2\Big)r^4dx\end{aligned}$$

ここに, (3-3-1) に補題 1 を適用すれば,

$$\int_\Omega(|\Delta v|^2+|\nabla\Delta v|^2)r^4dx\leq C(\mu)\int_\Omega|\Delta h|^2r^4dx \tag{3-4-10}$$

を得る．更に,

$$\begin{cases}\Delta^3v+k^2\Delta^2v=\Delta^2h, & x\in\Omega\\ \Delta^2v|_\Gamma=0\end{cases} \tag{3-4-11}$$

に補題 1 を適用して,

$$\int_\Omega|\Delta^2 v|^2r^4dx\leq C(\mu)\int_\Omega|\Delta^2h|^2r^4dx \tag{3-4-12}$$

を得る．よって, (3-4-10) と (3-4-12) を用いて,

$$\int_\Omega\Big|\Delta\frac{dv}{dk}\Big|^2\frac{1}{r^2}dx\leq CC(\mu)C_{f,g}\frac{(|k|^2+1)}{|k|^4}\leq CC(\mu)C_{f,g} \tag{3-4-13}$$

を得る．

(3-4-8), (3-4-3) と (3-4-13) を用いて,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2\frac{1}{r^4}dx\\ \leq\ &C\frac{1}{|k|^4}\int_\Omega\Big(\Big|\frac{dh}{dk}\Big|^2+|k|^2|v|^2+\Big|\Delta\frac{dv}{dk}\Big|^2\Big)\frac{1}{r^4}dx\\ \leq\ &CC_{f,g}\Big(\frac{1}{|k|^4}+\frac{1}{|k|^2(|k|^2+1)}+\frac{1}{|k|^4}\Big)\\ \leq\ &\frac{CC_{f,g}}{(|k|^2+1)^2}\end{aligned} \tag{3-4-14}$$

を得る．

(3-4-7) と (3-4-14) により,

$$\forall k\in C^+,\quad |k|^2\int_\Omega\Big|\frac{dv}{dk}\Big|^2\frac{1}{r^4}dx\leq\frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1}$$

が得られる．

- $\int_\Omega |\nabla \frac{dv}{dk}|^2 \frac{1}{r^4} dx \leq \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1}$

1. $k \in K$ のとき, 系 1 を用いれば,

$$\int_\Omega \left|\nabla \frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{1}{r^4} dx \leq CC_{f,g}(|k|^2+1)^2 \leq \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1} \tag{3-4-15}$$

を得る.

2. $k \in C^+ \backslash K$ のとき, (3-4-5) より

$$\frac{dv}{dk} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{dh}{dk} - 2kv - \Delta \frac{dv}{dk}\right)$$

なので,

$$\left|\nabla \frac{dv}{dk}\right|^2 \leq \frac{C}{|k|^4}\left(\left|\nabla \frac{dh}{dk}\right|^2 + |k|^2 |\nabla v|^2 + \left|\nabla \Delta \frac{dv}{dk}\right|^2\right) \tag{3-4-16}$$

を得る．また, ヘルムホルツ方程式 (3-4-9) に対して, 命題 3 を適用すると,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla \Delta \frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{1}{r^4} dx \quad &\leq \quad \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|k \nabla \Delta v|^2 + |k \Delta^2 v|^2 + |k \nabla \Delta^2 v|^2 \\ &\quad + \left|\nabla \Delta \frac{dh}{dk}\right|^2 + \left|\Delta^2 \frac{dh}{dk}\right|^2 + \left|\nabla \Delta^2 \frac{dh}{dk}\right|^2\Big) r^4 dx\end{aligned}$$

を得る. 更に, 方程式 (3-4-11) に補題 1 を適用して,

$$\int_\Omega (|\nabla \Delta^2 v|^2 + |\Delta^2 v|^2) r^4 dx \leq C(\mu) \int_\Omega |\Delta^2 h|^2 r^4 dx \tag{3-4-17}$$

を得る. (3-4-10) と (3-4-17) を用いて,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla \Delta \frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{1}{r^4} dx \quad &\leq \quad CC(\mu) C_{f,g} \frac{(|k|^2+1)^2}{|k|^4} \\ &\leq \quad 2CC(\mu) C_{f,g}\end{aligned} \tag{3-4-18}$$

を得る. また, 命題 3 より,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^2 \frac{1}{r^4} dx \quad &\leq \quad \frac{C}{|k|^4} \int_\Omega \Big(|\nabla h|^2 + |\Delta h|^2 + |\nabla \Delta h|^2\Big) r^4 dx \\ &\leq \quad C \frac{|k|^2+1}{|k|^4} \int_\Omega (|\nabla g|^2 + |\nabla f|^2 + |\Delta g|^2 + |\Delta f|^2 \\ &\quad + |\nabla \Delta g|^2 + |\nabla \Delta f|^2) r^2 dx \\ &\leq \quad CC_{f,g} \frac{|k|^2+1}{|k|^2}\end{aligned} \tag{3-4-19}$$

を得る.

(3-4-16), (3-4-19) と (3-4-18) により,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\nabla \frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{1}{r^4} dx \\
\leq\ & C\left(\frac{1}{|k|^4}\int_\Omega |\nabla f|^2 \frac{1}{r^4} dx + \frac{1}{|k|^2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \frac{1}{r^4} dx + \frac{1}{|k|^4}\int_\Omega \left|\nabla \Delta \frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{1}{r^4} dx\right) \\
\leq\ & CC_{f,g}\left(\frac{1}{|k|^4} + \frac{|k|^2+1}{|k|^4} + \frac{1}{|k|^4}\right) \\
\leq\ & \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1} \qquad \text{(3-4-20)}
\end{aligned}
$$

を得る.

(3-4-15) と (3-4-20) により,

$$
\forall k \in C^+, \quad \int_\Omega \left|\nabla \frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{1}{r^4} dx \leq \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1}
$$

が得られる.

以上より,

$$
\forall k \in C^+, \quad \int_\Omega \left(\left|\nabla \frac{dv}{dk}\right|^2 + |k|^2\left|\frac{dv}{dk}\right|^2 + |v|^2\right) \frac{1}{r^4} dx \leq \frac{CC_{f,g}}{|k|^2+1}
$$

よって, 命題 1 が証明される. □

第4章　補足(補題1の証明)

証明. $u(x,t)$ を波動方程式 (1-0-1) の解とし, その初期値 f と g の重み付きノルム $\|f\|_{L_p^2}$, $\|g\|_{L_p^2}$ は有限であるとする.

帰納法より, 任意の $p = 0, 1, 2, \cdots$ 対して, 次の不等式が成り立つ:

$$\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2) r^p dx \le \int_\Omega (g^2 + |\nabla f|^2)(r+t)^p dx, \quad t > 0. \tag{4-0-1}$$

その証明は参考文献 [3] にあるが, 万全を期すために以下に証明を与える.

$p = 0$ のとき, エネルギー保存則により,

$$\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx = \int_\Omega (g^2 + |\nabla f|^2) dx$$

が成り立つ.

$p \ge 0$ のとき, (4-0-1) が成り立つとする.

$$\eta_{R_{p+1}} := \begin{cases} |x|^{p+1}, 0 < |x| < R \\ R^{p+1}, |x| > R \end{cases}$$

とおく. (1-0-1) に $u_t \eta_{R_{p+1}}$ をかけて, $(0,t) \times \Omega$ において積分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_\Omega (u_{\tau\tau} - \Delta u) u_\tau \eta_{R_{p+1}} dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_\Omega u_{\tau\tau} u_\tau \eta_{R_{p+1}} dx d\tau - \int_0^t \int_\Omega \Delta u u_\tau \eta_{R_{p+1}} dx d\tau \end{aligned} \tag{4-0-2}$$

ここに,

$$\int_0^t \int_\Omega u_{\tau\tau} u_\tau \eta_{R_{p+1}} dx d\tau = \int_\Omega \left[u_\tau^2 \eta_{R_{p+1}} \right]_0^t dx - \int_\Omega \int_0^t u_{\tau\tau} u_\tau \eta_{R_{p+1}} d\tau dx$$

であるので,

$$\int_0^t \int_\Omega u_{\tau\tau} u_\tau \eta_{R_{p+1}} dx d\tau = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[u_\tau^2 \eta_{R_{p+1}} \right]_0^t dx \tag{4-0-3}$$

を得る. 一方, 発散定理と境界条件を使えば,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega \Delta u u_\tau \eta_{R_{p+1}} dx d\tau \\
= \;& \int_0^t d\tau \Big(\int_{\Omega_R} \Delta u u_\tau r^{p+1} dx + \int_{\Omega_\infty} \Delta u u_\tau R^{p+1} dx \Big) \quad (\Omega_\infty := \{x \in \Omega \big| \; |x| > R\}) \\
= \;& \int_0^t d\tau \Big(\int_\Gamma \sum_{i=1}^n \partial_i u u_\tau r^{p+1} \nu_i ds + \int_{|x|=R} \sum_{i=1}^n \partial_i u u_\tau r^{p+1} \frac{x}{|x|} ds - \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i (u_\tau r^{p+1}) dx \\
& + \int_{|x|=R} \sum_{i=1}^n \partial_i u u_\tau R^{p+1} (-\frac{x}{|x|}) ds - \int_{\Omega_\infty} \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i u_\tau R^{p+1} ds \Big) \\
= \;& -\int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i \partial_\tau u \eta_{R_{p+1}} dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_\tau u (p+1) r^p \frac{x_i}{r} dx d\tau, \qquad \text{(4-0-4)}
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i \partial_\tau u \eta_{R_{p+1}} dx d\tau = \frac{1}{2} \int_\Omega \big[|\nabla u|^2 \eta_R \big]_0^t dx \qquad \text{(4-0-5)}
$$

を得る. (4-0-3), (4-0-4), (4-0-5) を (4-0-2) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \frac{1}{2} \int_\Omega \big[\eta_{R_{p+1}} (u_\tau^2 + |\nabla u|^2) \big]_{\tau=t} dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \eta_{R_{p+1}} (g^2 + |\nabla f|^2) dx \\
& + (p+1) \int_0^t \int_{\Omega_R} r^p u_\tau u_r d\tau dx
\end{aligned}
$$

を得る. よって,

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \eta_{R_p+1} (u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2) dx \\
\le \;& \int_\Omega r^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx + (p+1) \int_0^t \int_\Omega r^p (u_\tau^2 + |\nabla u|^2) dx d\tau
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで, $\eta_{R_{p+1}}(u_\tau^2 + |\nabla u|^2)$ は単調増加関数列なので, Beppo Levi の単調収束定理により, $R \to \infty$ とすると,

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega r^{p+1} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \\
\le \;& \int_\Omega r^{p+1} (g^2 + |\nabla f|^2) dx + (p+1) \int_0^t \int_\Omega r^p (u_\tau^2 + |\nabla u|^2) d\tau dx
\end{aligned}
$$

となる. 帰納法の仮定により, 第二項は

$$
\int_0^t \int_\Omega r^p (|u_\tau|^2 + |\nabla u|^2) d\tau dx \le \int_\Omega (g^2 + |\nabla f|^2) dx \int_0^t (r+\tau)^p d\tau
$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega r^{p+1}(u_t^2+|\nabla u|^2)dx \\
\le\ &\int_\Omega r^{p+1}(g^2+|\nabla f|^2)dx+(p+1)\int_\Omega (g^2+|\nabla f|^2)dx\int_0^t (r+\tau)^p d\tau \\
\le\ &\int_\Omega r^{p+1}(g^2+|\nabla f|^2)dx+\int_\Omega \left[(r+\tau)^{p+1}(g^2+|\nabla f|^2)\right]_0^t dx \\
=\ &\int_\Omega (r+t)^{p+1}(g^2+|\nabla f|^2)dx \qquad (4\text{-}0\text{-}6)
\end{aligned}
$$

となる. よって, (4-0-1) が成り立つ.

(2-3-3) により, h_1 と h_2 を h の実部, 虚部とし, v_1, v_2 を v の実部と虚部とすると, 実部方程式:

$$
\begin{cases}
\Delta v_1+\mathrm{Re}k^2 v_1=h_1(x), \quad x\in\Omega \\
v_1|_\Gamma=0
\end{cases}
$$

虚部方程式:

$$
\begin{cases}
\Delta v_2+\mathrm{Im}k^2 v_2=h_2(x), \quad x\in\Omega \\
v_2|_\Gamma=0
\end{cases}
$$

を得る. 先ず, v_1 について考える. u_1 を混合問題

$$
\begin{cases}
\partial_{tt}u-\Delta u=0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty) \\
u_1(0,x)=0,\ \partial_t u_1(0,x)=h_1(x) \\
u_1|_\Gamma=0
\end{cases}
$$

の解として, (4-0-1) を使うと,

$$
\int_\Omega ((\partial_t u_1)^2+|\nabla u_1|^2)r^p dx \le \int_\Omega h_1^2(r+t)^p dx, \quad t>0. \qquad (4\text{-}0\text{-}7)
$$

である.

$$
v_1(x,k)=\int_0^\infty e^{ikt}u_1(t,x)dt
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (|\nabla v_1|^2+|v_1|^2)r^p dx \\
=\ &\int_\Omega \Big(\Big|\nabla\int_0^\infty e^{i\omega t}e^{-\mu t}u_1(t,x)dt\Big|^2+\Big|\int_0^\infty e^{i\omega t}e^{-\mu t}u_1(t,x)dt\Big|^2\Big)r^p dx \\
\le\ &\int_\Omega \Big(\big(\int_0^\infty e^{-\mu t}|\nabla u_1|dt\big)^2+\big(\int_0^\infty e^{-\mu t}|u_1|dt\big)^2\Big)r^p dx \qquad (4\text{-}0\text{-}8)
\end{aligned}
$$

となる. ここで, シュワルツの不等式を使うと,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega(|\nabla v_1|^2+|v_1|^2)r^p dx \\
\le\ &\Big(\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|u_1|^2)r^p dx\Big) \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|u_1|^2)r^p dx
\end{aligned}\tag{4-0-9}$$

となる. 更に,

$$u_1(x,\tau)=u_1(x,0)+\int_0^t\partial_\tau u_1(x,\tau)d\tau=\int_0^t\partial_\tau u_1(x,\tau)d\tau$$

なので, シュワルツの不等式により,

$$|u_1(x,t)|\le(\int_0^t 1d\tau)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t|\partial\tau u_1(x,\tau)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}}$$

を得る. 従って,

$$|u_1(x,t)|^2\le t\int_0^t|\partial_\tau u_1(x,\tau)|^2d\tau \tag{4-0-10}$$

を得る. (4-0-10) を (4-0-9) に代入して,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega(|\nabla v_1|^2+|v_1|^2)r^p dx \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big(\int_\Omega\big(|\nabla u_1|^2+t\int_0^t|\partial_\tau u_1|^2d\tau\big)r^p dx\Big) \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big(\int_\Omega|\nabla u_1|^2r^p dx+\int_\Omega t(\int_0^t|\partial_\tau u_1|^2d\tau\big)r^p dx\Big) \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big(\int_\Omega|\nabla u_1|^2r^p dx+t\int_0^t d\tau\int_\Omega|\partial_\tau u_1|^2r^p dx\Big)
\end{aligned}$$

と評価できる.
(4-0-7) を使うと,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega(|\nabla v_1|^2+|v_1|^2)r^p dx \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big(\int_\Omega|h_1|^2(r+t)^p dx+t\int_0^t d\tau\int_\Omega|h_1|^2(r+\tau)^p dx\Big) \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big(\int_\Omega|h_1|^2(r+t)^p dx+t\int_0^t d\tau\int_\Omega|h_1|^2(r+t)^p dx\Big) \\
\le\ &\frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu t}dt\Big((1+t^2)\int_\Omega|h_1|^2(r+t)^p dx\Big) \\
\le\ &\frac{C}{\mu}\int_\Omega|h_1|^2dx\int_0^\infty(1+t^2)e^{-\mu t}2^p(r^p+t^p)dt
\end{aligned}$$

を得る. $e^{\mu t}$ のテイラー展開を利用すれば,

$$e^{-\mu t} = \frac{1}{e^{\mu t}} \leq \frac{(p+4)!}{(\mu t)^{p+4}}, \quad t \geq 0$$

と評価でき, 更に, $r > 1$ なので,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (1+t^2)e^{-\mu t}2^p(r^p+t^p)dt \\
=\ &\int_0^1 (1+t^2)e^{-\mu t}2^p(r^p+t^p)dt + \int_1^\infty (1+t^2)e^{-\mu t}2^p(r^p+t^p)dt \\
\leq\ &\int_0^1 (1+t^2)e^{-\mu t}2^p(1+t^p)r^p dt + \int_1^\infty 2^p(1+t^2)(r^p+t^p)\frac{(p+4)!}{(\mu t)^{p+4}}dt \\
\leq\ &C_1 r^p + \int_1^\infty 2^p(1+t^2)(1+t^p)\frac{(p+4)!}{(\mu t)^{p+4}}r^p dt \\
\leq\ &C_1 r^p + C_2(\mu)r^p \\
\leq\ &C(\mu)r^p
\end{aligned}$$

を得る. よって,

$$\int_\Omega (|\nabla v_1|^2 + |v_1|^2)r^p dx \leq C(\mu)\int_\Omega |h_1|^2 r^p dx$$

v_2 についても同じ考え方で,

$$\int_\Omega (|\nabla v_2|^2 + |v_2|^2)r^p dx \leq C(\mu)\int_\Omega |h_2|^2 r^p dx$$

を得る. これらの不等式を辺々加えることにより, 補題 1 が証明される. □

謝辞

本論文の作成にあたり, 何時も入念なご指導を頂いた指導教員の久保英夫教授に深謝いたします．２年にわたり未熟な私に対して辛抱強く, 献身的に指導を頂いたことに対して心より感謝申し上げます。加えて, 久保英夫教授が不在の間お世話になった坂口茂教授と常に適切なアドバイスを下さった先輩たちに感謝申し上げます. また, 数学教室の先生方や院生の皆さん, 事務の方々には大変お世話になりまして, 大変感謝しております. この２年間の大学院での経験を今後も活かしていきたいと思います。

参考文献

[1] A.V. Filinovskii, On the decay rate of solutions of the wave equation in domains with star-shaped boundaries, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 143, No. 4, 3429-3440(2007)

[2] A.V. Filinovskii, Stabilization of solutions of the wave equation in domains with star-shaped boundaries, Russ. J.Math. Phys. 8, No. 4, 433-452(2001)

[3] A.V. Filinovskii, Stabilization of solutions of the wave equation in unbounded domains, Russ. Akad. Nauk mat. Sb. Vol. 187, No. 6, 131-160(1996)

[4] 丸山大輔, 非線形 Klein-Gordon 方程式系の混合問題における局所エネルギー減衰, 修士論文 (大阪大学), 2008.

[5] 井川満, 偏微分方程式 2, 岩波講座現在数学の基礎 6, 岩波書店, 1997.

[6] J. Metcalfe and C.D. Sogge, Long time existence of quasilinear wave equations exterior to star-shaped obstacles via energy methods, SIAM J. Math. Anal. 38, No. 1, 188-209(2006)